

周维容 研究员
从业证书: T277916
投资咨询证书: TZ014500
84208666-1518
504566098@qq.com

仲培 联系人
从业证书: T204068
投资咨询证书: TZ008898
569990564@qq.com

黄衍崧 联系人
从业证书: T217954
投资咨询证书: TZ008583
025-85718775
378099905@qq.com

相关研究

投资研究周报提要

内容概况

1. 介绍 Black-Scholes 欧式期权定价模型
2. 介绍 Barone-Adesi-Whaley 美式期权定价模型
3. 介绍期权的二叉树定价模型
4. 介绍期权的蒙特卡罗模拟定价模型

目录

1. 简介	2
2. BS 欧式期权定价模型	2
3. BAW 美式期权定价模型	3
4. 二叉树定价模型	4
5. 蒙特卡罗定价模型	5
6. 总结	6

风险提示: 本报告内容、分析方法或模型是历史经验的总结所形成的, 在市场不断变化下存在失效的可能。请投资者注意风险。

1. 简介

2015年2月9日，上海证券交易所推出了首个标准化的期权合约——上证50ETF期权，标志着我国正式进入期权新时代。2017年，大连商品交易所和郑州商品交易所相继推出了豆粕期权和白糖期权，并且在未来交易所还将推出更多的商品期权，这开启了商品期权的元年。场内期权的逐步发展的同时，期权的场外市场的规模呈指数性增长。因此，期权未来将是中国金融衍生品市场中的重要组合部分。期权是一种极为特殊的衍生产品，它能使买方有能力避免坏的结果，而从好的结果中获益；同时，它也能使卖方产生巨大的损失。当然，期权不是免费的，这就产生了期权定价问题。期权定价理论是现代金融理论最为重要的成果之一，集中体现了金融理论的许多核心问题，其理论之深，方法之多，应用之广，令人惊叹。期权的标的资产也由股票、指数、期货合约、商品(金属、黄金、石油等)，外汇增加到了利率，可转换债券、认股权证、掉期和期权本身等许多可交易证券和不可交易证券。目前来说，关于期权定价方法的主要研究成果有BS欧式期权定价模型、BAW美式期权定价模型、二叉树定价模型以及蒙特卡罗定价模型；在本文中，将分别介绍这四种主要的期权定价方式及其各自的特点。

2. BS 欧式期权定价模型

BS欧式期权定价模型是有Black和Scholes两位学者在1973年提出的，BS欧式期权定价模型的推出，解决一直以来期权定价的问题，所以在1997年获得了诺贝尔经济学奖。BS的假设条件有：1.股票价格遵循对数正态模型；2.没有交易费用或税收，所有证券都是高度可分的；3.不存在无风险套利机会；4.证券交易时连续的；5.投资者能够以同样的无风险利率借款或贷款；6.无风险利率为常数且对所有到期日都相同。基于BSM模型的假设，股票价格的运动符合几何布朗运动：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \quad (1)$$

同时，根据伊藤引理，我们可以得到：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S} dZ_t \quad (2)$$

然后，我们通过构造一个无风险投资组合，买入 $\Delta \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right)$ 份股票买入一份期权，即对(1)乘以 Δ 减去(2)，通过化简得一个微分方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (3)$$

最后，通过解这个微分方程，我们可以得到唯一解，对于不支付红利的欧式看涨(c)、看跌(p)期权公式如下：

$$c = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/k) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/k) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

其中，S、K、r、T、 σ 分别代表标的价格、执行价、无风险利率、到期时间、波动率；其中，N(x) 是累计概率函数，自变量符合标准正态分布。

BS 模型避免了期权定价对于未来股票价格的概率分布和投资者风险偏好的依赖，是现代期权定价理论的基础；但是 BS 模型的假设条件太多以及 BSM 模型无法计算美式期权的价格，因此也存在比较大的限制。

3. BAW 美式期权定价模型

美式期权相比较欧式期权来说，唯一的不同就是能够在到期日前进行提前行权，使持有人能够获得比欧式期权更多获利的机会。因此，美式期权定价的本质是找到最佳实施边界，在这边界的两侧分为继续持有区域和终止持有区域；所以美式期权不存在得到解的显式表达式，而是研究它的数值解或者近似解析解。Barone-adesi 和 Whaley 在 1987 年提出了二次逼近法。二次逼近法相比较数值方法计算更为简单直观，而且计算速度快，结果精度高。我国商品期权的定价都采用的是该法，即 BAW 美式期权定价模型。

美式期权满足类似于 BS 定价模型的微分方程，不过在 BS 模型里，令 $b=r$ ，而在美式期权里我们需要考虑持有成本 b。所以微分方程如下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + b \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

然后，我们根据上述原理，通过迭代法计算美式期权的临界价格 S^* ，最后我们得到结论如下：

美式看涨期权：

$$\text{当 } S < S^* \text{ 时： } C(S, T) = c(S, T) + A_2 \left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_2}$$

$$\text{当 } S \geq S^* \text{ 时： } C(S, T) = S - X$$

$$A_2 = \left(\frac{S^*}{q_2}\right) \left(1 - e^{(b-r)T} N(d_1(S^*))\right)$$

美式看跌期权：

$$\text{当 } S > S^* \text{ 时： } P(S, T) = p(S, T) + A_1 \left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_1}$$

$$\text{当 } S \leq S^* \text{ 时： } P(S, T) = X - S$$

$$A_1 = -\left(\frac{S^*}{q_1}\right) \left(1 - e^{(b-r)T} N(-d_1(S^*))\right)$$

在上述公式中，C 和 P 代表的是美式看涨和看跌期权，而对应的 c 和 p 则是欧式看涨和看跌期权，N(x) 是累计概率函数，自变量符合标准正态分布。

BAW 美式期权定价模型不仅解决了 BS 模型不能计算美式期权的问题，而且它可以应用于一系列期权定价中

(期货期权、股票期权、外汇期权等)，在应用中只需要对持有成本 b 进行相应的调整即可。然而，BAW 定价模型也存在一定问题：对于到期日超过一年的期权定价精度会稍差于二叉树定价模型。

4. 二叉树定价模型

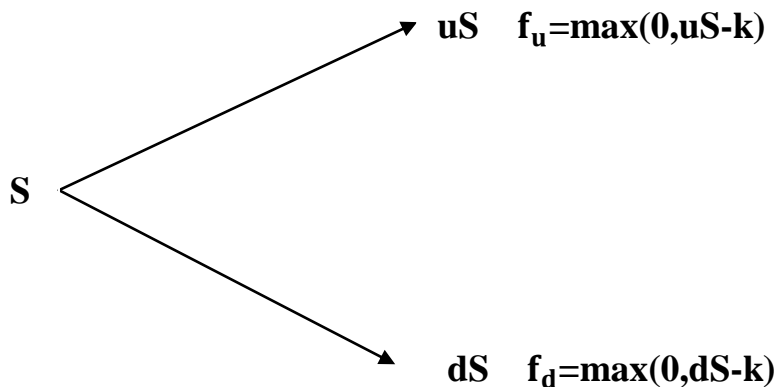
之前所讲的 BS 模型和 BAW 模型虽然有很多优势，但是它们的推导过程是较为复杂的。不能被普通人所理解接受。因此，在 1979 年，Cox、Ross 和 Rubinstein 等人采用一种更为直观地方法来计算期权的价格，这种方法叫作二叉树法。

我们从最简单的单步二叉树开始分析，假设标的资产为股票，其价格服从二项分布，也就是说，在时间 T 内，股票价格将上升到 uS 或者下降到 dS (u 为股票价格上涨的倍数， d 为股票价格下跌的倍数)。我们可以通过买 Δ 份股票和买一个欧式看涨期权来构造一个无风险投资组合。该组合的价格不论标的价格如何变化，期初和期末的价格都应该相等，所以我们可以得到：

$$-f_u + \Delta uS = -f_d + \Delta dS$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{(u - d)S}$$

一步二项式模型



图表来源：东华期货研究部

根据无风险套利原则，其收益等于期望收益，则：

$$-c + \Delta f_u = e^{r\Delta t}(-c + \Delta S)$$

我们可以得到看涨期权的价格公式以及股票价格上涨概率 p ：

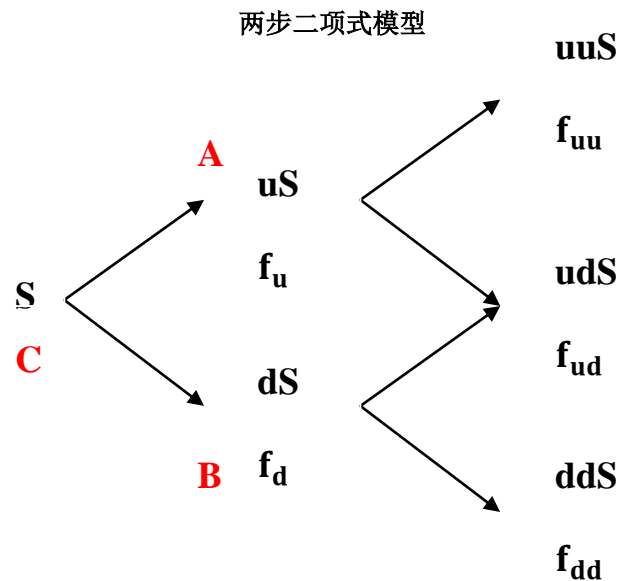
$$c = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1 - p)f_d)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

上述方法为风险中性，用无风险收益把期权未来期望收益贴现到现在，即为期权当前的价格：

$$f = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1 - p)f_d)$$

接下来，我们进一步研究一下二步二叉树，研究的期权为美式看跌期权，美式期权可以提前进行行权，因此需要计算在时间节点 A 的期权价格并与 A 时间点直接行权的价值进行对比，



图表来源：东华期货研究部

如果提前行权的价值高于节点 A 的期权价格，则提前行权，采用该节点 A 的价值：

$$f_A = \max(e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1 - p)f_{ud}), f_u)$$

然后，B 点和 C 点也一样，最终期权的价格为：

$$f_b = \max(e^{-r\Delta t}(pf_{ud} + (1 - p)f_{dd}), f_d)$$

$$P = \max(e^{-r\Delta t}(pf_A + (1 - p)f_B), K - S)$$

为了能够更加精确计算出期权的价格，我们只需要增加步数和缩小时间间隔，一般来说，当步数增加到 30 以上时，通过二叉树模型计算所得的期权价格已经基本等于它实际的价格。二叉树期权定价模型不仅容易理解，计算简便，而且能够定价大部分的期权。不过，将二叉树模型运用于计算高维标的的期权价格时，所需要的计算量和储存量都将呈现指数形式增加，遭遇所谓的“维度灾难”。

5. 蒙特卡罗定价模型

蒙特卡罗模拟是一种通过模拟标的资产价格的随机运动路径得到期权价值期望值的数值方法，也是一种应用十分广泛的期权定价方法。蒙特卡罗模拟是基于风险中心来将定价的，其基本思路是：期权价值实际上可以归结为期权到期回报的期望值的贴现，因此尽可能地模拟风险中性世界中标的资产价格的多种运动路径，然后计算每种路径结果下的期权回报期望值，最后进行贴现然后在取平均数就可以得到期权价格在这里，我们就具体地介绍美式期权

的定价方法—最小二乘的蒙特卡罗模拟。首先，通过蒙特卡罗模拟生产标的资产价格的样本路径。然后，我们通过利用最小二乘法回归求得每个时间点的持有期权的期望收益，并将其与该时刻立刻执行期权的收益相比较，若持有期望收益大于立刻执行的收益，则继续持有，反之，则立刻行权。紧接着，从期权到期日开始逆向求解，得到每条样本路径上的最优期权执行时间和相应的期权收益。最后，将每条样本路径的期权收益用无风险利率来贴现，然后取它们的均值即可得到期权的价格。蒙特卡罗模拟定价比较灵活且具有维数效应的特点，而且模拟运算的时间随变量个数的增加呈线性增长，其运算是比较有效率的；但是，该方法的局限性在于它的结果精度依赖于模拟运算次数。

6. 总结

通过上文，我们简单地介绍一下当前主流的 4 种期权定价方式，BS 和 BAW 定价模型是通过数学推导而建立的数学模型来计算期权的价格，而二叉树和蒙特卡罗模拟则是通过模拟标的未来价格变化和大量模拟运算来计算出期权的价格。虽然各种方法都存在一定的差异性，但是它们都服从无套利定价模型。随着标记资产的变化以及各种嵌入式期权的出现，期权的定价则变得更为复杂，其定价的理论也在不断发展，各种新型的期权定价方式不断推出，因此期权定价的发展也是永无止境的。然而，不同的定价方法都有着各自的优缺点，在实际应用中，我们要根据研究的对象的特征来选择最优的定价方式，从而提高实际定价的效率。

江苏东华期货微信公众平台

服务号



订阅号



免责声明

本报告仅供江苏东华期货有限公司（以下简称“本公司”）的客户使用。本公司不会因接收人收到本报告而视其为本公司的当然客户。本报告是基于本公司认为可靠的已公开信息，但本公司不保证该等信息的准确性或完整性。本报告所载的资料、工具、意见及推测只提供给客户作参考之用，并非作为或被视为出售或购买证券或其他投资标的的邀请或向人作出邀请。本报告所载的资料、意见及推测仅反映研究人员个人于发布本报告当日的判断。在不同时期，本公司可发出与本报告所载资料、意见及推测不一致的报告。客户不应视本报告为作出投资决策的惟一因素。本报告中所指的投资及服务可能不适合个别客户，不构成客户私人咨询建议。在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见并不构成对任何人的投资建议。在任何情况下，本公司不对任何人因使用本报告中的任何内容所引致的任何损失负任何责任。本报告版权仅为本公司所有，未经书面许可，任何机构和个人不得以任何形式翻版、复制和发布，亦不得作为诉讼、仲裁、传媒及任何单位或个人引用之证明或依据，不得用于未经允许的其它任何用途。如引用、刊发，需注明出处为江苏东华期货有限公司，且不得对本报告进行有悖原意的引用、删节和修改。