

周维容 从业证书: T277916
研究员 投资咨询证书: TZ014500
84208666-1518
504566098@qq.com

仲培 从业证书: T204068
联系人 投资咨询证书: TZ008898
569990564@qq.com

黄衍菘 从业证书: T217954
联系人 投资咨询证书: TZ008583
025-85718775
378099905@qq.com

相关研究

期权定价方法介绍

投资研究周报提要 内容概况

1. 介绍缺口期权
2. 介绍复合期权
3. 介绍障碍期权
4. 介绍二元期权

目录

1.简介	2
2.缺口期权.....	2
3.复合期权.....	3
4.障碍期权.....	4
5.二元期权.....	6
6.总结	6

风险提示: 本报告内容、分析方法或模型是历史经验的总结所形成的, 在市场不断变化下存在失效的可能。请投资者注意风险。

1. 简介

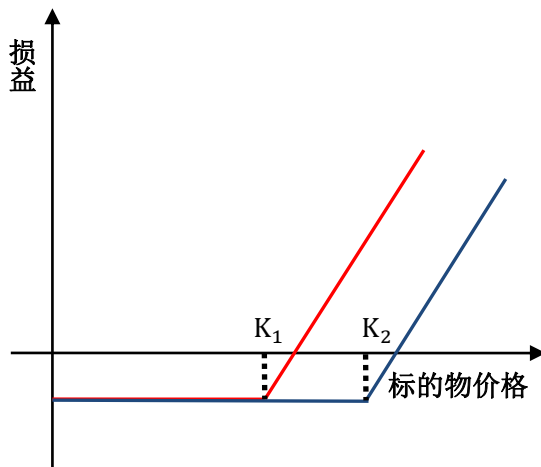
2017年，郑商所、大商所相继推出了白糖、豆粕期货期权，期权再次成为业内最热话题之一，场内期权的发展也同时推动场外期权的快速发展。相比较场内期权，场外期权更加灵活，个性化，是由交易双方在场外交易市场（OTC），根据场外双方的洽谈，或者中间商的撮合，按照双方需求自行制定交易的期权。由于场外期权是按照交易双方的需求来定制的，所以期权的结构不免会异于场内期权，导致产品更为复杂，交易对冲难度更大。在场外期权中，这类结构异于场内期权的非标准化期权也叫作奇异期权。奇异期权有着普通期权无法匹及的灵活性和多样性，但相应地，奇异期权的定价则更为复杂。因此，目前而言，我国参与奇异期权交易的基本上都是金融机构，因为奇异期权交易更为专业化，准入门槛高。不过，非金融机构可以通过专业的金融机构来使用奇异期权，从而更好地对冲自身的风险和实现收益的稳定使自己的收入更为稳定。因此，随着金融衍生品市场的发展，在不久未来，奇异期权必然也会是我国场外市场的重要组合部分之一。

由于奇异期权的多样性，要对它们进行完全的描述是不可能的，因此本文旨在介绍4种常见的奇异期权：缺口期权（gap option）、复合期权（compound option）、障碍期权（barrier option）以及二元式期权（binary option），并且给出它们的基本数学定价方法。

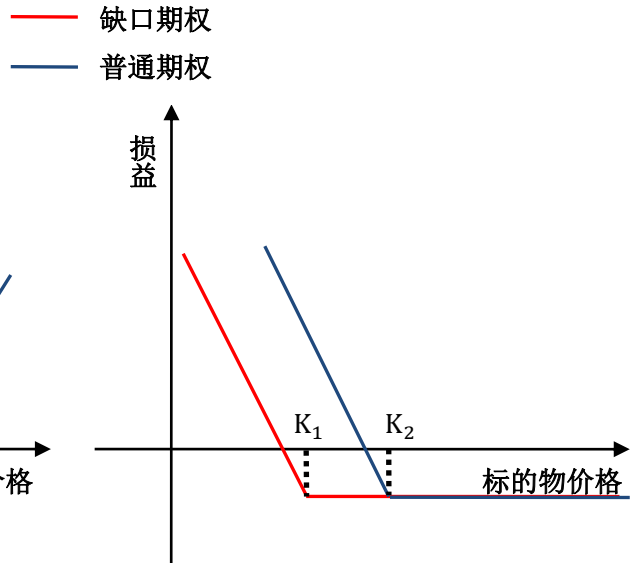
2. 缺口期权

缺口期权（gap option）是一种欧式期权，持有者只有在期权到期日才可以选择行权，与普通期权不同的是，缺口期权有2个不同的执行价格 K_1, K_2 。对于缺口看涨期权，缺口期权的到期收益为 $S_T - K_1$ ，当 $S_T > K_2$ 时。缺口看涨期权和普通看涨期权不同的地方在于有一个额外的执行价格 K_2 。当 $S_T > K_2$ ，期权到期收益将会增加 $K_2 - K_1$ 。当 $K_2 > K_1$ ，额外部分 $K_2 - K_1$ 是正收益。反之，则额外部分是负收益。对于缺口看跌期权来说，期权到期收益则为 $K_1 - S_T$ 。通过对比缺口期权和普通期权的到期收益图，我们可以发现两者不同的部分 $K_1 - K_2$ 的差值。

缺口看涨和普通看涨到期收益对比



缺口看跌和普通看跌到期收益对比



图表来源：东华期货研究部

因此，普通欧式期权的经过一定的修改，我们就可以得到与之对应的缺口欧式期权，所以我们可以通过对 BSM 模型进行一定的修改来计算缺口欧期权的价格，计算公式如下：

$$\begin{aligned}
 c &= Se^{-qT}N(d_1) - K_1e^{-rT}N(d_2) \\
 p &= K_1e^{-rT}N(-d_2) - Se^{-qT}N(-d_1) \\
 d_1 &= \frac{\ln(S/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
 d_2 &= \frac{\ln(S/K_2) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}
 \end{aligned}$$

其中， S ， K ， q ， r ， T ， σ 分别为标的资产价格，执行价，付息率，无风险利率，到期时间和波动率。此外， $N(x)$ 是累计概率函数，自变量符合标准正态分布。

3. 复合期权

简而言之，复合期权（compound option）就是期权的期权，也就是说持有者可以在某一个约定时期以约定价格买入或卖出一份期权。复合期权的四大类分别是看涨期权的看涨期权、看涨期权的看跌期权、看跌期权的看涨期权以及看跌期权的看跌期权。在这里，我们研究的是欧式复合期权。以看涨期权的看涨期权为例，当在复合期权第一个行权日 T_1 ，复合期权的持有者能够以执行价 K_1 来购买一个看涨期权，并且该看涨期权给与购买者能够在行权日 T_2 以执行价 K_2 来购买标的资产。对于看涨期权的看涨期权，只有当 T_1 时刻的期权价格大于第一个执行价 K_1 时，复合

期权才会被执行，否则放弃该期权。

BSM 定价期权模型的假设也适用于欧式复合期权，所以欧式复合期权的标的物价格变动也符合几何布朗运动，我们可以用二元正态分布来计算它的价格。因此，欧式看涨套看涨的价格为：

$$\begin{aligned}
 & Se^{-qT_2}M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - K_2e^{-rT_2}M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1}K_1N(a_2) \\
 & a_1 = \frac{\ln(S/S^*) + (r - q + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}} \qquad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1} \\
 & b_1 = \frac{\ln(S/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}} \qquad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}
 \end{aligned}$$

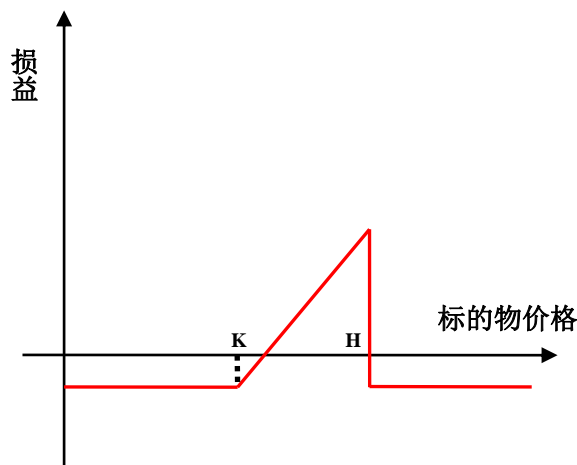
公式里， $M(a, b; \rho)$ 是二元正态分布的累计概率函数； S, K, q, r, T, σ 分别为标的资产价格，执行价，付息率，无风险利率，到期时间和波动率。 S^* 则为在 T_1 时刻使期权价格等于执行价 K_1 的标的物的价格。通过相同的方法，我们也可以得到看涨期权的看跌期权，看跌期权的看涨期权以及看跌期权的看跌期权的定价公式如下：

$$\begin{aligned}
 & K_2e^{-rT_2}M(-a_2, b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) - Se^{-qT_2}M(-a_1, b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1}K_1N(-a_2) \\
 & K_2e^{-rT_2}M(-a_2, -b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - Se^{-qT_2}M(-a_1, -b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1}K_1N(-a_2) \\
 & Se^{-qT_2}M(a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) - K_2e^{-rT_2}M(a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1}K_1N(a_2)
 \end{aligned}$$

4. 障碍期权

障碍期权 (barrier option) 实质上是在一个普通期权的基础上增加适当选定的障碍。在期权到期日之前，如果标的资产价格超过该障碍，则期权的回报将发生变化。其相关定义为期权的回报依赖于标的资产的价格在一段特定时间内是否达到某个特定的水平(临界值)，这个临界值就称为“障碍”水平。依据期权的生效方式，期权在有效期内可能会敲入或敲出，即期权购买者将获得或者失去期权的执行权利。因而障碍期权通常分为敲入障碍期权和敲出障碍期权两类。如图，障碍期权的到期收益图像一个“鱼鳍”，因此也被称为鲨鱼鳍期权。

向上敲出看涨到期收益



图表来源：东华期货研究部

向下敲出看涨期权 (down-and-out call) 是敲出障碍期权的一种, 当标的物价格下降到障碍水平, 则这个普通的看涨期权就失效了 (即敲出)。与之对应的是向下敲入看涨期权 (down-and-in call), 当标的物价格上升至障碍水平, 则这个普通的看涨期权就生效了 (即敲入); 我们将这个两个期权结合在一起就可以得到一个普通的看涨期权, 这也是障碍期权的特性之一, 因此我们只需要计算出其中一个障碍期权, 另一个障碍期权的价格就可以通过用普通期权的价格减去之前计算出的障碍期权的价格得到:

$$C_{do} + C_{di} = C$$

$$C_{uo} + C_{ui} = C$$

$$P_{do} + P_{di} = P$$

$$P_{uo} + P_{ui} = P$$

当障碍水平 H 是小于等于执行价 K 的, 向下敲入看涨期权的价格为:

$$C_{di} = Se^{-qT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda} N(y) - Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T})$$

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$

$$y = \frac{\ln[H^2/(SK)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

如果障碍水平 H 是大于等于执行价 K , 则向下敲出看涨期权的价格为:

$$C_{do} = SN(x_1)e^{-qT} - Ke^{-rT}N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - Se^{-qT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda} N(y_1) + Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{T})$$

$$x_1 = \frac{\ln(S/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$y_1 = \frac{\ln(H/S)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

对于向上敲出看涨期权 (up-and-out call), 当障碍水平 H 小于等于执行价 K 时, 向上敲出看涨期权的价格为 0, 而与之对应的向上敲入看涨期权 (up-and-in call) 的价格为普通期权的价格。当 $H > K$ 时, 向上敲出看涨期权的计算公式为:

$$C_{ui} = SN(x_1)e^{-qT} - Ke^{-rT}N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - Se^{-qT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] + Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})]$$

通过相同的方法, 障碍看跌期权的计算公式如下:

$$\text{当 } H \geq K, \quad p_{ui} = -Se^{-qT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda} N(-y) + Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{T})$$

$$\text{当 } H < K, \quad p_{uo} = -SN(-x_1)e^{-qT} + Ke^{-rT}N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + Se^{-qT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)]$$

$$- Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})]$$

$$\text{当 } H \geq K, \quad p_{do} = 0$$

$$\text{当 } H < K, p_{\text{uo}} = -SN(-x_1)e^{-qT} + Ke^{-rT}N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + Se^{-qT}\left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] - Ke^{-rT}\left(\frac{H}{S}\right)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})]$$

5. 二元期权

或有现金看涨期权 (cash-or-nothing call) 和或有现金看跌期权 (cash-or-nothing put) 就是二元期权的一种。对于或有现金看涨期权来说, 标的物价格在到期日低于执行价 K , 则到期收益为 0; 如果标的物价格在到期日高于执行价 K , 则到期收益为固定现金 Q 。在无风险的原则下, 标的物资产超过执行价的概率为 $N(d_2)$, $N(d_2)$ 公式在缺口期权中已经给出, 所以在这里就不多加阐述了。之后, 我们只需要将固定现金 Q 折现成当前价, 在乘以概率, 即可得到或有现金看涨期权的价格为 $Qe^{-rT}N(d_2)$ 。对于或有现金看跌期权, 当标的物价格在到期日低于执行价 K 时, 则到期收益为固定现金 Q ; 反之, 则到期收益为 0。在无风险原则下, 或有现金看跌期权的价格的公式: $Qe^{-rT}N(-d_2)$ 。

另外一种二元期权为或有资产看涨期权 (asset-or-nothing call) 和或有资产看跌期权 (asset-or-nothing put), 它们基本和之前介绍的或有现金看涨期权和或有现金看跌期权一样, 除了到期收益由现金变一个资产。因此, 或有资产看涨期权和或有资产看跌期权的价格分别为 $Se^{-qT}N(d_1)$ 和 $Se^{-qT}N(-d_1)$ 。

或有资产期权和或有现金期权的另一个特性是我们可以通过它们的组合来构造出普通期权。通过买入一个或有资产看涨期权和卖入一个或有现金看涨期权来构造一个普通的欧式看涨期权; 买入一个或有资产看跌期权和卖入一个或有现金看跌期权来构造一个普通的欧式看跌期权。

6. 总结

通过上文, 我们分别介绍了 4 种奇异期权: 缺口期权、复合期权、障碍期权以及二元式期权, 并且我们在基于 BSM 定价模型的基础上给出了它们的数学计算方式。奇异期权相较于普通期权更为复杂, 需要通过金融工程来构建, 不过它能够更好的满足投资者不同需求, 因此而受到投资者的青睐。随着我国金融衍生品市场的发展, 场外期权的规模也不断壮大, 奇异期权在其中必然会发挥着不可替代的作用。由于奇异期权的准入门槛比较高, 一般投资者或非金融机构很难直接参与其中, 不过他们可以通过相关的金融机构来了解和应用奇异期权, 给他们自身带来额外的利益。

江苏东华期货微信公众平台

服务号



订阅号



免责声明

本报告仅供江苏东华期货有限公司（以下简称“本公司”）的客户使用。本公司不会因接收人收到本报告而视其为本公司的当然客户。本报告是基于本公司认为可靠的已公开信息，但本公司不保证该等信息的准确性或完整性。本报告所载的资料、工具、意见及推测只提供给客户作参考之用，并非作为或被视为出售或购买证券或其他投资标的的邀请或向人作出邀请。本报告所载的资料、意见及推测仅反映研究人员个人于发布本报告当日的判断。在不同时期，本公司可发出与本报告所载资料、意见及推测不一致的报告。客户不应视本报告为作出投资决策的惟一因素。本报告中所指的投资及服务可能不适合个别客户，不构成客户私人咨询建议。在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见并不构成对任何人的投资建议。在任何情况下，本公司不对任何人因使用本报告中的任何内容所引致的任何损失负任何责任。本报告版权仅为本公司所有，未经书面许可，任何机构和个人不得以任何形式翻版、复制和发布，亦不得作为诉讼、仲裁、传媒及任何单位或个人引用之证明或依据，不得用于未经允许的其它任何用途。如引用、刊发，需注明出处为江苏东华期货有限公司，且不得对本报告进行有悖原意的引用、删节和修改。